Проект «Сводимости на нумерациях»

Теория нумераций получила свое развитие из идеи Геделя кодирования счетных семейств объектов натуральными числами таким образом, чтобы эти объекты можно было «восстановить» по их номерам. Впервые эффективность этого подхода была продемонстрирована в классической работе К. Геделя о неполноте арифметики [1]. Понятие вычислимости нумерации ν некоторого семейства множеств означает равномерную перечислимость последовательности множеств $\nu(0), \nu(1), \nu(2), \ldots$. Номер n интерпретируется как описание в некотором формальном языке или как программа перечисления множества $\nu(n)$. Исследование вычислимых нумераций семейства всех вычислимых функций было инициировано Роджерсом [2]. Он рассматривал структуру вычислимых нумераций относительно операции сводимости. Говорят, что нумерация ν *сводится* к нумерации μ, если существует вычислимая функция, которая по любому номеру n в нумерации ν вычисляет номер множества $\nu(n)$ в нумерации μ. Если нумерации ν, μ сводятся друг к другу, то они называются эквивалентными. Фактор-структура по данному отношению эквивалентности позволила получить частично упорядоченное множество, именуемое позже полурешеткой Роджерса.

В настоящее время имеется несколько подходов к определению понятия полурешеток Роджерса. К примеру, в работе [3] Гончаровым и Сорби был предложен общий подход к введению понятия вычислимой нумерации для широкого класса семейств конструктивных объектов. В частности, наиболее популярными являются классы арифметической и Ершовской иерархии. А в работе [6] было предложено ограничивать сводящие функции следующим образом: нумерация ν *bm-сводится* к нумерации μ, если существует вычислимая функция f, такая, что $\nu(x) = \mu(f(x))$ и прообраз $f^{-1}(x)$ конечен для всех x. И, наконец, в работе [7] было предложено понятие пунктуальной нумерации для примитивно рекурсивных функций: нумерация ν семейства примитивно рекурсивных функций является пунктуальной, если существует примитивно рекурсивная функция $g_\nu(n, x)$, такая, что для всех $n, x \in \omega$ верно $g_\nu(n, x) = (\nu(n))(x)$. Пунктуальной полурешеткой Роджерса называют фактор-структуру пунктуальных нумераций относительно сводимости примитивно рекурсивными функциями.

В полурешетках Роджерса принято изучать следующие свойства:

(1) Мощность полурешетки.
- В классической работе Хуторецкого показано, что мощность полурешеток Роджерса вычислимых семейств равна 1 или бесконечна [4].
- В работе [5] был доказан аналог теоремы Хуторецкого для вычислимых семейств в арифметической иерархии.
- Выполнимость аналога теоремы Хуторецкого для вычислимых семейств в иерархии Ершова до сих пор остается нерешенным вопросом. Есть гипотеза, что существует вычислимое семейство в иерархии Ершова с конечной нетривиальной мощностью полурешетки Роджерса.
- В работе [6] показано, что аналог теоремы Хуторецкого не выполняется для ограниченных полурешеток Роджерса вычислимых семейств. В частности, для произвольного $n \geq 2$ существуют вычислимые семейства с мощностью $2^n - 1$ для ограниченных полурешеток Роджерса.

(2) Решеточность полурешетки.
- В работе Селиванова было показано, что полурешетка Роджерса вычислимых семейств не является решеткой, если она не является одноэлементной [8].
- В работе [5] был доказан аналог теоремы Селиванова для вычислимых семейств в арифметической иерархии.
- В работе [6] показано, что аналог теоремы Селиванова не выполняется для ограниченных полурешеток Роджерса вычислимых семейств. В частности, было показано существование семейства в.п. множеств, такого, что ограниченная полурешетка Роджерса является бесконечной решеткой.

(3) Наибольший элемент полурешетки.
- Впервые данным вопросом занимался сам Х. Роджерс [2].
- Конечные семейства в.п. множеств всегда имеют универсальную нумерацию [9].
- Абешевым было построено двухэлементное семейство 2-в.п. множеств без универсальной нумерации.

(4) Минимальные элементы.
- Для семейств в.п. множеств количество минимальных элементов в полурешетке Роджерса либо 0, либо 1, либо бесконечно [11, 12].
- В иерархии Ершова кроме вышеуказанных случаев существуют полурешетки Роджерса с двумя минимальными элементами [13].
- В пунктуальных полурешетках Роджерса для бесконечных семейств примитивно рекурсивных функций минимальных элементов нет [7].

И.Ш. Калимуллин, А.Г. Мельников и К.М. Нг [10] начали развивать новое направление в теории структур, вычислимых за ограниченное время. В их модели используется общее понятие онлайн-алгоритма: онлайн-алгоритм должен описываться при помощи программы, не допускающей циклов неограниченной длины. Такие алгоритмы характерны для примитивно рекурсивных функций. Вдохновившись такой моделью онлайн-алгоритма, Баженов, Оспичев и Мустафа предложили пунктуальную полурешетку Роджерса для примитивно рекурсивных функций. Основная концепция пунктуальных алгоритмов состоит в следующем: конструктивные объекты должны выдавать новые данные без неограниченных ожиданий.

В рамках мастерской, вдохновившись пунктуальными структурами, нашей командой было введено понятие пунктуальной полурешетки Роджерса для семейств множеств.

Определение 1. Множество X называем *пунктуальным*, если существует примитивно рекурсивная функция p, такая, что
- $X = \mathrm{range}(p)$;
- $(\exists m)(\exists n < m)[p(n) = p(m)] \to (\forall k > m)(\exists s < m)[h(k) = h(s)]$.

Пусть S – семейство пунктуальных множеств. Нумерацию ν семейства S будем называть *пунктуальной*, если существует примитивно рекурсивная функция $p(n, x)$,такая, что для произвольного $n \in \omega$ функция $\lambda x.p(n, x)$ удовлетворяет условиям определения 1 для множества $\nu(n)$. В рамках проекта пунктуальную полурешетку Роджерса для семейств пунктуальных множеств определяем также, как в работе [7].

Основная цель нашего проекта — исследование инвариантов пунктуальной полурешетки Роджерса для семейств пунктуальных множеств. В рамках мастерской удалось существенно продвинуться в понимании инвариантов пунктальной полурешетки Роджерса для семейств пунктуальных множеств. Хорошо известно, что самым простым нетривиальным семейством являются двухэлементные семейства, и классическая полурешетка Роджерса вычислимых двухэлементных семейств либо одноэлементна, либо изоморфна верхней полурешетке вычислимо перечислимых m-степеней. В связи с этим нам было важно понять свойства верхней полурешетки вычислимо перечислимых prm-степеней, которая определяется m-сводимостью по примитивно рекурсивной функции.

Теорема 1. *Существуют множества A и B, такие, что A примитивно рекурсивно, но не пунктуально, а B пунктуально, но не примитивно рекурсивно.*

Теорема 2. *Вычислимая m-степень содержит бесконечно много prm-степеней.*

Теорема 3. *Для любого в.п., но не вычислимого множества A существует в.п. множество B, такое, что $A \equiv_m B$ и $A \not\leq_{prm} B$.*

Следствие 4. *Каждая невычислимая в.п. m-степень содержит бесконечно много prm-степеней.*

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{S} = \{A, B\}$, где A, B – различные пунктуальные множества. Тогда*

(1) если A или B конечно, то $|\mathcal{R}(\mathcal{S})| = 1$;

(2) если A, B бесконечны и $A \cap B$ конечно, то $|\mathcal{R}(\mathcal{S})| = 1$;

(3) если $A \subset B$, то $|\mathcal{R}(\mathcal{S})| = \infty$ с главным элементом. В частности, $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ изоморфно верхней полурешетке в.п. prm-степеней.

Теорема 6. *Существуют пунктуальные множества A, B, такие, что*

(1) $|A \cap B| < \infty$ и для $\mathcal{S} = \{A, B\}$ нет универсальной нумерации.

(2) $|A \cap B| < \infty$ и $|\mathcal{R}(\{A, B\})| = 1$.

(3) $|A \cap B| = \infty$ и $|\mathcal{R}(\{A, B\})| = \infty$ без главного элемента.

Теорема 7. *Не существует пунктуальной нумерации семейства всех пунктуальных множеств.*

Теорема 8. *Если бесконечное семейство S обладает фридберговой нумерацией, то в $\mathcal{R}(S)$ не существует наименьшего элемента, тем самым $|\mathcal{R}(S)| = \infty$.*

Список литературы

[1] Kurt Gödel. Uber formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte fur Mathematik und Physik.* Volume 38, 1931, pp.173-198.

[2] H. Rogers. Gödel Numberings of Partial Recursive Functions. *The Journal of Symbolic Logic.* Volume 23, No.3, 1958, pp.331-341.

[3] С.С. Гончаров, А. Сорби. Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса. *Алгебра и логика.* Том 36, Номер 6, 1997, с.359-369.

[4] А.Б. Хуторецкий. О мощности верхней полурешетки вычислимых нумераций. *Алгебра и логика.* Том 10, Номер 5, 1971, с.561-569.

[5] S.A. Badaev, S.S. Goncharov, S.Yu. Podzorov, A. Sorbi. Algebraic properties of Rogers semilattices of arithmetical numberings. *Computability and Models.* 2003, pp. 45-77.

[6] N.A. Bazhenov, S.S. Ospichev, M. Mustafa. Bounded reducibility for computable numberings. *Lecture Notes in Computer Science.* Volume 11558, 2019, pp.96-107.

[7] N.A. Bazhenov, S.S. Ospichev, M. Mustafa. Rogers semilattices of punctual numberings. *Mathematical Structures in Computer Science.* 2022, pp. 1-25.

[8] V.L. Selivanov. Two theorems on computable numberings. *Algebra Logic.* Volume 15, No.4, 1976, pp. 297–306.

[9] Yu.L. Ershov. Theory of Numberings. Nauka, Moscow. 1977.

[10] I.Sh. Kalimullin, A.G. Melnikov, K.M. Ng. Algebraic structures computable without delay. *Theoretical Computer Science.* Volume 674, 2017, pp. 73-98.

[11] С.С. Марченков. О вычислимых нумерациях семейств общерекурсивных функций. *Алгебра и логика.* Том 11, номер 5, 1972, с.588-607.

[12] S.A. Badaev. On minimal enumeration. *Siberian Advances in Mathematics.* Volume 2, No.1, 1992, pp.1-30.

[13] S.A. Badaev, S. Lempp. A decomposition of the Rogers semilattice of a family of d.c.e. sets. *The Journal of Symbolic Logic.* Volume 74, No.2, 2009, pp.618-640.