Сводимости на нумерациях

Ключевые слова: нумерация, алгоритм без задержек, сводимость нумераций, сводимость по перечислимости, алгоритмическая сводимость, примитивно рекурсивная функция.

Одной из важных задач теоретического программирования является задача эффективного построения по набору программ вычисления функций (перечисления множеств) на одном устройстве программ вычисления тех же функций (перечисления тех же множеств) на другом устройстве. Практическая реализация этих трансляций оказывается весьма сложной, а часто пока и не осуществлённой. В рамках проекта ожидается получить продвижения в разработке фундаментального аппарата реализации описанных программных трансляций.

Для разъяснения трудностей трансляций между реализациями эквивалентных алгоритмов на разных устройствах будет использован подход, основанный на понятиях вычислимой нумерации и сводимостей нумераций. Причём кроме классической сводимости нумераций мы будем рассматривать как позитивные сводимости (e- и p-сводимости), так и более приближенные к практике понятия, возникающие при рассмотрении алгоритмов в ограниченными ресурсами (полиномиальные алгоритмы, примитивно рекурсивные алгоритмы и т.д.).

Предварительные сведения. Сводимости нумераций. Базовые понятия теории нумераций были сформулированы А.Н. Колмогоровым в середине 50-ых годов XX столетия. Так нумерацией счётного семейства объектов называется произвольное сюръективное отображение множества натуральных чисел на это семейство. Нумерация семейства называется *вычислимой*, если по номеру каждого объекта в этой нумерации можно эффективно указать описывающую его алгоритмическую процедуру. В частности, если объектами являются вычислимые функции, то требуется указать программу, вычисляющую эту функцию.

При исследовании возможности алгоритмически транслировать объекты одной вычислимой нумерации относительно другой вычислимой нумерации того же множества объектов возникает понятие сводимости на нумерациях. Исследованиям вычислимых нумераций посвящено много работ (см., например, [1–4]), интересных не только с точки зрения классической теории вычислимости, но и с точки зрения теории алгебраических структур и обобщенной вычислимости на них.

Интересным и перспективным направлением представляется уточнение классов вычислимых классов функций, осуществляющих вычислимую сводимость. Как отмечается в работе Ю.Л. Ершова [5], “*для определения сложности (сложностей) можно было бы ввести более тонкие структуры, например, определяя сводимость с помощью более «простых» функций, точнее потребовав, чтобы h (смотри определение сводимости) было из некоторого подкласса H класса всех ОРФ, замкнутого относительно суперпозиции.*” В рамках мастерской предлагается, в частности, начать систематическое исследование алгоритмических сводимостей нумераций, основанных на вычислимых без задержек функциях (примитивно рекурсивных, полиномиально вычислимых и т.д.).

Кроме того, планируется исследовать обобщённые алгоритмические сводимости, предложенные А.Н. Дёгтевым [6]. Определение такой обобщенной сводимости является формализацией следующего нечёткого понятия: нумерация α «сводится» к β, если существует «вычислительное устройство» такое, что если ему на вход подавать в каком-либо порядке все номера произвольного объекта нумеруемого семейства в нумерации β, то оно в конечном итоге выдаст на выход в некотором порядке все номера того же объекта в нумерации α.

Пунктуальные структуры и нумерации. И.Ш. Калимуллин, А.Г. Мельников и К.М. Нг [7] начали развивать новое направление в теории алгебраических структур, вычислимых за ограниченное время. В их модели используется общее понятие онлайн-алгоритма: онлайн-алгоритм должен описываться при помощи программы, использующей только циклы ограниченной длины. Другими словами, в Pascal-подобном языке программирования нельзя использовать конструкции вида WHILE … DO, REPEAT … UNTIL и GOTO. Подобная модель онлайн-алгоритма формализуется при помощи *пунктуальных структур*: носителем пунктуальной структуры является множество всех натуральных чисел, а базисные операции и отношения структуры являются примитивно рекурсивными (или любому другому классу алгоритмической сложности).

Теория пунктуальных структур требует введения совершенно новых, сложных конструкций. Обзор результатов теории пунктуальных структур можно найти, например, в [8]. Отметим, что методы теории пунктуальных структур уже нашли применение в исследованиях примитивно рекурсивной сводимости для нумераций семейств примитивно рекурсивных функций [9].

В рамках проекта на мастерской ставится следующая **задача**:

Изучить решёточные свойства структур, индуцируемых сводимостями на вычислимых нумерациях.

Предполагается, что в рамках проекта студенты, магистранты и аспиранты смогут познакомиться с современными методами теории вычислимости, применяя их в активно развивающейся области теории нумераций. Выносимая задача разбивается на конкретные частные подзадачи: исследование минимальных нумераций, исследование универсальных нумераций и т.д. В зависимости от результатов выполнения задачи возможна публикация в научном издании.

Список литературы

[1] Ю.Л. Ершов, Теория нумераций. М.: Наука, 1977.

[2] С.С. Гончаров, А. Сорби, Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса, Алгебра и логика, 36:6 (1997), 621–641.

[3] S. Goncharov, V. Harizanov, J. Knight, C. McCoy, R. Miller, R. Solomon, Enumerations in computable structure theory, Annals of Pure and Applied Logic, 136:3 (2005), 219–246.

[4] D. Diamondstone, N. Greenberg, D. Turetsky, Natural large degree spectra, Computability, 2:1 (2013), 1–8.

[5] Ю.Л. Ершов, Нумерация семейств общерекурсивных функций, Сиб. матем. журн., 8:5 (1967), 1015–1025.

[6] А.Н. Дёгтев, О сводимостях нумераций, Матем. сб., 112(154):2(6) (1980), 207–219.

[7] I. Kalimullin, A. Melnikov, K.M. Ng, Algebraic structures computable without delay, Theoretical Computer Science, 674 (2017), 73-98.

[8] R. Downey, A. Melnikov, K.M. Ng, Foundations of online structure theory II: The operator approach, Logical Methods in Computer Science, 17:3 (2021), 6:1-6:35.

[9] N. Bazhenov, M. Mustafa, S. Ospichev, Rogers semilattices of punctual numberings, Mathematical Structures in Computer Science, 2022, published online, doi: 10.1017/S0960129522000093