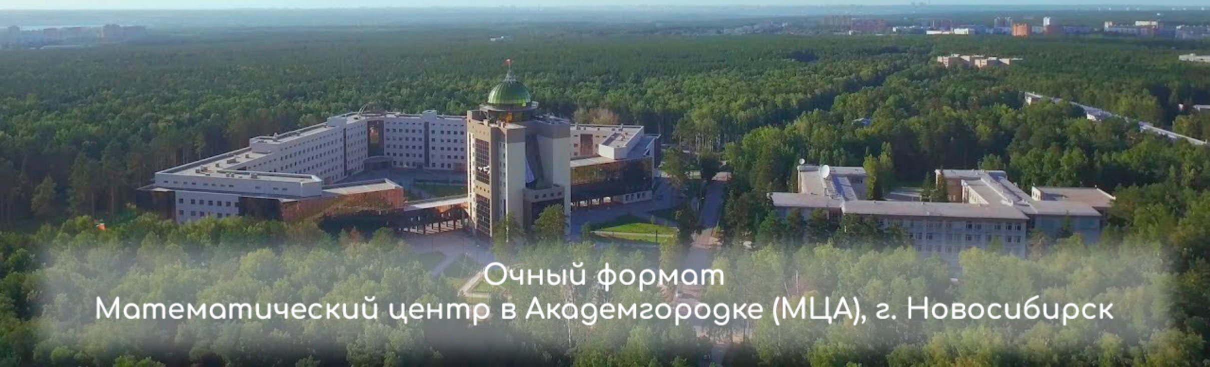
24.07-30.07 Большая математическая мастерская 2022
07.08-13.08

Проект «Экстремальные вопросы геометрической теории функций»

MATHEMATICAL CENTER IN AKADEMGORODOK

ТЮМГУ

РЕГИОНАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР



Очный формат

Математический центр в Академгородке (МЦА), г. Новосибирск

Команда проекта

Каюмов Ильгиз Рифатович

Заказчик

д.ф.-м.н., в.н.с. научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, профессор кафедры мат. анализа Казанского федерального университета

Насибуллин Рамиль Гайсаевич

Куратор

к.ф.-м.н., н.с. (доцент) КФУ, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа

Авхадиев Фарит Габидинович

Заказчик

зав. кафедрой теории функций и приближений Казанского федерального университета, г.н.с. научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа

MATHEMATICAL CENTER IN AKADEMGORODOK

Описание проекта

B. Riemann

При развитии теории функций комплексной переменной можно исходить из различных точек зрения. Например, можно следовать курсу Гурвица: построить теорию для полиномов, а затем с помощью предельного перехода построить теорию аналитических функций. Оказывается, при развитии теории функций можно выбрать более простой путь: попытаться охарактеризовать аналитические функции такими свойствами, которые опираются на геометрические представления.

Огромный вклад в развитие геометрической теории функций внёс Риман, который использовал не только геометрические, но и физические представления.

Неравенства типа Харди

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$ — область на комплексной плоскости. Тогда можно определить функцию расстояния до границы области:

$$\rho(z, \Omega) := \inf_{w \in \mathbb{C} \setminus \Omega} |z - w|, z \in \Omega.$$

Отметим, что функция расстояния широко используется при исследовании задач теории функций и математической физики. Эта функция имеет простой геометрический смысл и обладает рядом замечательных свойств.
Пусть $u : \Omega \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция, тогда можно определить градиент ∇u:

$$\nabla u(z) = \frac{\partial u(z)}{\partial x} + i \frac{\partial u(z)}{\partial y}, \quad z = x + iy \in \Omega.$$

Основной объект исследований - неравенство типа Харди:

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u(z)|^p}{\rho^{s-p}(z, \Omega)} dx\, dy \geqslant c_p(s, \Omega) \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p}{\rho^s(z, \Omega)} dx\, dy, \quad \forall u \in C_0^1(\Omega), \qquad (1)$$

где $p \in [1, \infty)$, $s \in \mathbb{R}$ — фиксированные числа, а $c_p(s, \Omega) \in [0, \infty)$ — константа Харди.

Актуальные вопросы

Можно доказать, что константа Харди $c_p(s,\Omega) \in [0,\infty)$ инвариантна относительно линейных конформных преобразований области. А можно ли описать все такие области Ω, для которых константа Харди будет положительной?

Одна из актуальных знаменитых задач (гипотеза Дэвиса) состоит в том, чтобы доказать, что

$$c_2(2,\Omega) \leq 1/4$$

для любой области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Эта гипотеза доказана лишь в частном случае. Проблема не решена даже в семействе односвязных областей, конформно эквивалентных единичному кругу.

Ещё одна интересная задача — описать множество областей $\Omega \subset \mathbb{C}$, для которых $c_2(2,\Omega) = 1/4$.

Обобщение неравенства Бора

Одна из классических задач теории аналитических функций — это задача нахождения величины

$$r_0 = \sup \left\{ r \in (0,1) : \ B_f(r) := \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n \leqslant \|f\|_\infty \right\},$$

где супремум берётся по множеству ограниченных аналитических функций в единичном круге. М. Рис, И. Шур и Ф. Винер доказали, что $r_0 = \frac{1}{3}$. Это число, называемое радиусом Бора, используется многими авторами в своих исследованиях, что привело к различным обобщениям этой задачи.

Одна из актуальных задач состоит в том, чтобы обобщить неравенство Бора на случай подчинённых, а также квазиподчинённых аналитических функций.

Задачи на Мастерскую

На Мастерской мы планируем изучить:

- задачи, связанные с неравенствами Харди для выпуклых и слабо выпуклых областей,
- задачи обобщения неравенства Бора для подчинённых и квазиподчинённых аналитических функций.

Задача: Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — произвольный набор вещественных чисел. Доказать неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i + x_j|^{\frac{1}{2}} .$$

Если Вы можете решить такую задачу, то Вам точно к нам!